

前 言

本书根据教育部高等学校力学教学指导委员会制定的《结构力学课程教学基本要求》编写。全书共 9 章，内容包括绪论、平面杆件体系的几何构造分析、静定结构的受力分析、虚功原理与结构位移计算、力法、位移法、移动荷载作用下结构的影响线、矩阵位移法及结构动力分析基础。前 7 章适用于 48 学时的结构力学课程教学，全书适用于 72 学时的教学。

本书传承了大连理工大学在结构力学课程教学中的知识体系和风格特色，特别注重结构力学的基本理论、基本概念、基本分析方法和工程应用。此外，在本书编写过程中也参考了大量的国内外优秀教材，扬长避短，与时俱进，力求使内容适当更新，并反映数字化、信息化的时代潮流。本书的特色主要体现在：①加强趣味性与可读性，增加了结构力学的发展历史和重要人物的简介；②推陈出新，更换了机动法作超静定力影响线等内容，剔除渐近分析法(如力矩分配法)等内容；③增强教材内容的工程性，增加了应用背景介绍；④从历史观、方法论、审美观和创造性思维的角度审视结构力学，力争融知识、能力、素质教育于一体。

全书由杨迪雄主编。参加本书编写工作的主要有：杨迪雄(第 1 章、第 7 章)、谷俊峰(第 2 章、第 3 章)、杨雷(第 4 章)、杨颀(第 5 章、第 9 章)、陈景杰(第 6 章)、胡小飞(第 8 章)。

在本书编写过程中，程耿东院士、洪明教授和杨春秋教授给予了热情的支持与鼓励，并提出了许多有益的建议，在此深表谢忱。

本书得到大连理工大学教务处教材出版基金的资助，也得到大连理工大学运载工程与力学学部工程力学系的大力支持。承蒙西安理工大学张俊发教授、同济大学陈建兵教授审阅了全部书稿，并提出了宝贵的修改意见，在此致以衷心的感谢！

诚挚欢迎读者批评指正。

编 者

2018 年 7 月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 结构力学的研究对象和任务.....	1
1.1.1 研究对象.....	1
1.1.2 任务.....	2
1.2 结构的计算简图.....	3
1.2.1 结构体系的简化.....	3
1.2.2 杆件的简化.....	3
1.2.3 结点的简化.....	4
1.2.4 支座的简化.....	4
1.2.5 材料性质的简化.....	5
1.2.6 荷载的简化.....	5
1.3 杆系结构和荷载的分类.....	6
1.3.1 杆系结构的分类.....	6
1.3.2 荷载的分类.....	7
1.4 结构力学的发展简史.....	7
1.4.1 能量原理和能量方法.....	8
1.4.2 力法和位移法.....	9
1.4.3 矩阵位移法和有限元法.....	10
第 2 章 平面杆件体系的几何构造分析	13
2.1 几何构造分析的几个概念.....	13
2.1.1 自由度和约束.....	13
2.1.2 瞬变体系与常变体系.....	15
2.1.3 瞬铰.....	16
2.2 平面几何不变体系的基本组成规则.....	16
2.2.1 二元体规则.....	17
2.2.2 两刚片规则.....	17
2.2.3 三刚片规则.....	17
2.3 平面杆件体系的计算自由度.....	21
2.3.1 刚片体系的计算自由度.....	22
2.3.2 铰接体系的计算自由度.....	24
2.3.3 混合体系的计算自由度.....	25
2.4 体系的几何构造与静定性.....	25

习题	26
第3章 静定结构的受力分析	29
3.1 单跨静定梁	29
3.1.1 单跨静定梁及其内力	29
3.1.2 荷载与内力之间的关系	30
3.1.3 分段叠加法	32
3.2 多跨静定梁	34
3.3 静定平面桁架	38
3.3.1 桁架的特点和分类	38
3.3.2 结点法	39
3.3.3 截面法	42
3.3.4 结点法和截面法的联合应用	43
3.4 静定平面刚架	45
3.4.1 刚架的特点	45
3.4.2 支座反力的计算	45
3.4.3 刚架的内力分析及内力图的绘制	48
3.4.4 静定刚架弯矩图的快速绘制	55
3.5 静定组合结构	57
3.6 三铰拱	62
3.6.1 三铰拱的支座反力和内力计算	62
3.6.2 三铰拱的合理轴线	67
3.7 静定结构的一般性质	70
习题	72
第4章 虚功原理与结构位移计算	78
4.1 结构位移计算概述	78
4.1.1 结构位移的概念	78
4.1.2 结构位移计算的目的	79
4.2 变形体的虚功原理	79
4.2.1 刚体体系的虚功原理	79
4.2.2 变形体虚功原理的应用条件	80
4.2.3 变形体虚功方程	81
4.2.4 虚力原理和虚位移原理	83
4.3 结构位移计算的单位荷载法	84
4.4 荷载作用下的位移计算	87
4.4.1 荷载引起的位移的计算公式	87
4.4.2 各类结构的位移公式	88
4.4.3 荷载作用下的位移计算举例	88

4.5	图乘法	93
4.5.1	图乘法及其应用条件	94
4.5.2	应用图乘法的几个具体问题	95
4.5.3	图乘法计算示例	97
4.6	温度变化时的位移计算	100
4.7	线弹性结构的互等定理	102
4.7.1	功的互等定理	102
4.7.2	位移互等定理	103
4.7.3	反力互等定理	104
4.7.4	位移反力互等定理	105
	习题	105
第 5 章	力法	109
5.1	超静定次数的确定	109
5.1.1	超静定结构的静力平衡特征和几何构造特征	109
5.1.2	超静定次数和多余约束力个数的确定	110
5.2	力法的基本概念	111
5.2.1	力法的基本未知量、基本体系和基本方程	111
5.2.2	多次超静定结构的力法分析	114
5.2.3	力法典型方程	115
5.3	超静定刚架和排架的计算	117
5.4	超静定桁架和组合结构的计算	123
5.5	对称结构的计算和半边结构	126
5.5.1	选取对称的基本体系	128
5.5.2	利用对称性取半边结构	131
5.6	两铰拱和无铰拱	135
5.6.1	力法求解两铰拱	135
5.6.2	力法求解无铰拱	139
5.7	支座移动和温度变化时的内力计算	142
5.7.1	支座移动时的计算	142
5.7.2	温度变化时的计算	144
5.8	超静定结构的位移计算	146
5.9	超静定结构计算结果的校核	150
5.9.1	平衡条件的校核	151
5.9.2	变形条件的校核	151
	习题	152
第 6 章	位移法	156
6.1	位移法的基本概念	156

6.1.1	关于位移法的简例	156
6.1.2	位移法的基本未知量和基本方程	158
6.1.3	位移法计算刚架的基本思路	159
6.1.4	位移法基本未知量的确定	159
6.2	等截面直杆的转角位移方程	162
6.2.1	由杆端位移求杆端内力	163
6.2.2	由荷载求固端内力	165
6.3	无侧移刚架的计算	167
6.3.1	基本未知量的选取	167
6.3.2	基本方程的建立	168
6.4	有侧移刚架的计算	170
6.5	对称结构的计算	176
6.6	位移法的基本体系	178
6.6.1	建立位移法的基本体系	179
6.6.2	位移法基本方程	179
6.6.3	建立位移法基本方程的具体过程	181
6.6.4	位移法典型方程	182
6.7	势能原理与位移法	183
6.7.1	势能驻值原理	183
6.7.2	等截面直杆的线弹性应变能	184
6.7.3	势能原理与位移法平衡方程	186
6.8	瑞利-里茨法	189
6.9	超静定结构的特性	191
	习题	192
第7章	移动荷载作用下结构的影响线	196
7.1	移动荷载和影响线的概念	196
7.2	静力法作简支梁内力影响线	198
7.3	结点荷载下梁和桁架的内力影响线	201
7.3.1	结点荷载作用下梁的内力影响线	201
7.3.2	桁架轴力影响线	203
7.4	机动法作静定内力影响线	206
7.5	影响线的应用	211
7.5.1	求各种荷载作用产生的影响量	211
7.5.2	求荷载的最不利位置	212
7.5.3	临界位置的判定——针对影响线为多边形的情况	213
7.5.4	临界位置的判定——针对影响线为三角形的情况	216
7.6	机动法作超静定内力影响线	219

习题	224
第 8 章 矩阵位移法	228
8.1 矩阵位移法的基本原理	228
8.2 单元刚度矩阵	229
8.2.1 局部坐标系下的单元刚度矩阵	229
8.2.2 单元刚度矩阵的性质	231
8.3 单元刚度矩阵的坐标转换	232
8.3.1 整体坐标系下的单元刚度矩阵	232
8.3.2 连续梁的单元刚度矩阵	235
8.3.3 轴力杆件的单元刚度矩阵	237
8.4 结构的整体刚度矩阵	239
8.4.1 单元、结点编号	239
8.4.2 整体刚度矩阵集成的直接刚度法	240
8.4.3 支承条件的引入	242
8.4.4 整体刚度矩阵的性质	243
8.4.5 铰结点的处理	243
8.5 等效结点荷载	244
8.5.1 矩阵位移法的基本方程	244
8.5.2 单元等效结点荷载	244
8.5.3 结构等效结点荷载	246
8.6 计算步骤和算例	248
8.6.1 桁架分析算例	249
8.6.2 刚架分析算例	252
8.6.3 组合结构分析算例	258
8.6.4 忽略轴向变形时矩形刚架的矩阵位移法	262
习题	264
第 9 章 结构动力分析基础	267
9.1 结构动力分析的特点和动力自由度	267
9.1.1 结构动力分析的特点	267
9.1.2 动力荷载的分类	267
9.1.3 体系的动力自由度	269
9.2 单自由度体系的自由振动	271
9.2.1 自由振动微分方程的建立	272
9.2.2 自由振动微分方程的解	273
9.2.3 结构的自振周期	274
9.3 单自由度体系的强迫振动	276
9.3.1 简谐荷载下的动力反应——共振现象	277

9.3.2	一般动力荷载下的动力反应——杜哈梅积分	280
9.3.3	几种常见动力荷载下的动力反应	282
9.4	阻尼对振动的影响	285
9.4.1	有阻尼单自由度体系的自由振动	285
9.4.2	有阻尼单自由度体系的强迫振动	288
9.5	多自由度体系的自由振动	292
9.5.1	刚度法	292
9.5.2	柔度法	297
9.5.3	主振型的正交性	299
9.6	多自由度体系的强迫振动	300
9.6.1	简谐荷载作用下的无阻尼强迫振动	300
9.6.2	振型叠加法	303
9.7	无限自由度体系的振动	308
	习题	311
	参考文献	315
	附录 平面结构分析矩阵位移法 MATLAB 程序	316
	索引	328

主要符号表

A	面积
a	振幅
b	宽度
c	支座广义位移、黏滞阻尼系数
C	阻尼矩阵
c_r	临界阻尼系数
d	结间距离
E	弹性模量
f	拱高、频率
F	力、广义力
F_p	集中荷载
F_H	水平推力
F_x, F_y	水平 (x)、垂直 (y) 方向的分力
F_N	轴力
F_{Nx}, F_{Ny}	轴力在水平 (x)、垂直 (y) 方向的分力
F_S	剪力
F_S^L, F_S^R	截面左、右的剪力
F_S^F	固端剪力
F_E	弹性力
F_I	惯性力
F_D	阻尼力
F_R	广义反力、反力合力
\bar{F}^e	局部坐标系下单元杆端力向量
F^e	整体坐标系下单元杆端力向量
\bar{F}_p^e	局部坐标系下单元固端力向量
G	剪切模量
h	高度
i	弯曲线刚度
I	截面惯性矩
I	单位矩阵
k	刚度系数、切应力分布不均匀系数
\bar{k}^e	局部坐标系下单元刚度矩阵
k^e	整体坐标系下单元刚度矩阵

K	结构刚度矩阵
l	长度、跨度
m	质量、分布弯矩
\bar{m}	线分布质量
M	质量矩阵
M	力矩、力偶矩、弯矩
M^F	固端弯矩
n	超静定次数
p	均布荷载集度
P^e	单元结点荷载向量
P	结构结点荷载向量
q	均布荷载集度
R	半径
r	半径、反力影响系数
S	静矩
t	时间、温度
T	周期
T	坐标转换矩阵
U	应变能
u	水平位移
v	竖向位移、挠度、速度
w	竖向位移
W	功、计算自由度、重量、弯曲截面系数
W_e	外虚功
W_i	内虚功
X	广义未知力、广义多余未知力
Y	位移幅值向量、主振型向量、主振型矩阵
y	位移
y	几何坐标、物理坐标
$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$	速度
$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$	加速度
Z	影响线量值
α	线膨胀系数、初始相位角
β	动力系数
Δ	广义未知位移
Δ	位移向量

Δ^e	单元杆端位移向量
δ	柔度系数、位移影响系数
ε	线应变
η	正则坐标、广义坐标、振型坐标
μ	泊松比
κ	曲率
φ	角位移、弦转角
γ_0	平均切应变
θ	截面转角、干扰力频率
ξ	阻尼比
ξ	单元定位向量
ρ	材料密度
ω	圆频率
Π	总势能

第 1 章 绪 论

人类自古以来建造了各种建筑物和构筑物，如埃及的金字塔，法国境内的加尔德引水桥，中国的万里长城、都江堰、赵州桥、故宫等。随着科学技术的进步，人们对于结构设计的规律以及结构的强度、刚度和稳定性逐渐有了认识，进而根据经验和实验，从不自觉到自觉地形成了专门的结构力学科学，并广泛应用于工程实践。

就基本原理和方法而言，结构力学是与理论力学、材料力学同时发展起来的，所以结构力学在发展的初期是与理论力学和材料力学融合在一起的。19 世纪初，由于新兴工业的发展，人们开始设计各种大规模的工程结构，对于这些结构的设计，要做较精确的分析和计算。因此，工程结构的分析理论和分析方法开始独立出来，至 19 世纪中叶，结构力学开始成为一门独立的学科。进入 20 世纪以来，由于新材料、新结构、新理论、新方法不断涌现，结构力学学科的内涵不断深化、范围不断扩展，已发展成为包括结构静力学、动力学、稳定理论、计算结构力学、智能材料结构、结构控制和健康监测等诸多分支的学科群，它的应用范围已经拓展至土木工程、水利工程、船舶工程、机械工程、航空航天工程等领域。事实上，结构力学一直是力学理论与工程实践紧密联系的桥梁和纽带，它是一门既古老、又常青、又与时俱进、又不断发展的应用力学学科。

1.1 结构力学的研究对象和任务

1.1.1 研究对象

建筑物、构筑物或其他工程对象中承受和传递荷载而起骨架作用的部分称为工程结构，简称为**结构**。例如，房屋建筑中的梁柱体系，水工建筑物中的大坝和闸门，公路和铁路桥梁、隧道、涵洞，船舶、汽车、飞机、载人飞船中的受力骨架等，都是工程结构的典型例子(图 1-1)。



图 1-1 建筑、桥梁和飞机

结构的受力特性和承载能力与其几何特征具有十分密切的联系。根据几何特征，结构可分为三类。

(1) **杆系结构**——由若干杆件相互连接而成。杆件的几何特征是横截面尺寸要比长度小得多。梁、拱、桁架、刚架是杆系结构的典型形式。

(2) **板壳结构**——也称为薄壁结构(图 1-2(a)、(b))。它的几何特征是厚度远小于长度和宽度。房屋建筑中的楼板和壳体屋盖、飞机和轮船的外壳等均属于板壳结构。

(3) **实体结构**——也称三维连续体结构,其几何特征是结构的长、宽、高三个方向的尺度大小相仿。重力式挡土墙(图 1-2(c))和水工建筑中的重力坝等均属于实体结构。

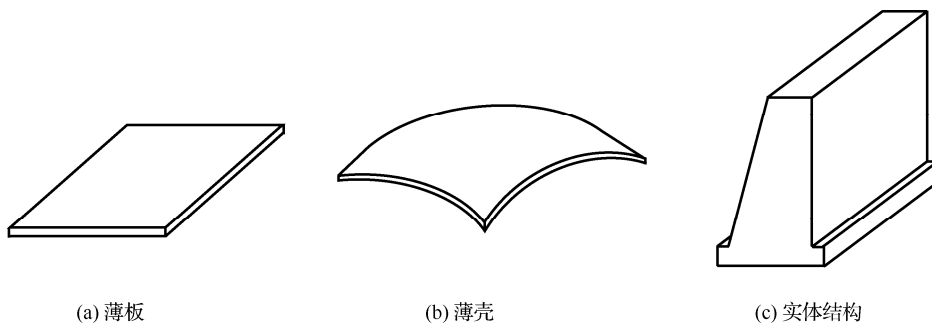


图 1-2

狭义的结构往往指的是杆系结构,而通常所说的结构力学是指杆系结构力学。

结构力学与理论力学、材料力学、弹塑性力学具有密切的关系。理论力学着重讨论质点(系)、刚体(系)机械运动的基本规律,抓主舍次,忽略物体的变形效应,常将物体视为质点或刚体。其余三门力学着重考察物体的变形效应,讨论结构及其构件的强度、刚度、稳定性和动力反应等问题,其中材料力学以单个杆件为主要研究对象,结构力学以杆系结构为主要研究对象,弹塑性力学以实体结构和板壳结构为主要研究对象。

1.1.2 任务

结构力学是研究结构的合理形式(如梁、桁架、刚架、拱等),以及在外力和其他外界因素作用下结构的内力、变形、动力反应和稳定性等方面的规律性的学科。研究目的是使结构满足安全性、适用性和经济性的要求。具体地说,结构力学的基本任务包括以下几个方面。

- (1) 讨论结构的组成规律、受力性能和合理形式,以及结构计算简图的合理选择。
- (2) 讨论结构内力和变形的计算方法,进行结构强度和刚度的验算。
- (3) 讨论结构的稳定性,以及在动力荷载作用下的结构反应和振动控制。

结构力学问题的研究手段包含理论分析、数值计算和实验研究三个方面。结构力学课程重点讲述理论分析和数值计算方面的内容。在结构分析中,首先把实际结构简化成计算模型,称为结构计算简图;然后对计算简图进行计算。结构力学中的计算方法是多种多样的,但这些方法都要考虑下列三类基本方程。

- (1) 力系的平衡方程或运动方程。
- (2) 变形的几何连续方程(或称为协调方程)。
- (3) 应力与变形间的物理方程(或称为本构方程)。

结构力学的基本解法是直接运用上述三类基本方程进行计算分析,可称为**平衡-几何-本构方法**。这些解法如果采用虚功或能量形式来表述,则称为**能量方法**。

过去的结构分析问题比较简单,都是依靠解析方法和“手算”解决的。随着电子计算机的出现和普及,大量的复杂工程分析与设计问题主要依靠“电算”。“电算”提高了结构力学解决问题的能力,同时对结构力学提出了新的要求,即“电算”方法必须适应“电算”的特点。因此,一些与结构计算机分析密切相关的内容,如能量原理、矩阵位移法、有限元法、离散元法、无网格法、等几何分析、结构分析软件、结构优化设计等,已在结构力学中占据越来越重要的地位。在结构力学学科领域,能量原理、数值计算方法和程序软件等形成了一个新的分支学科——计算结构力学。它是借助计算机采用数值方法解决结构力学问题的一个分支学科。

1.2 结构的计算简图

工程结构通常是很复杂的,完全按照实际情况进行力学分析既不可能,也无必要。因此,在对结构进行力学分析计算之前,利用简化和假设的手段,略去不重要的细节,突出其本质和基本特点,将实际结构用一个抽象和简化了的图形来代替,这种图形称为**结构的计算简图**,也称为力学模型。一般而言,结构分析中,首先把实际结构简化成力学模型(计算简图),然后对计算简图建立数学模型、计算模型与程序进行计算,最后将计算结果运用于工程分析、设计和施工,此过程如图 1-3 所示,其中建立方程和求解方程是两个关键环节。与结构分析密切相关的模型确认与验证是学术界关注的重要研究课题,它要求结构力学的理论方法都应得到物理实验的验证和工程实践的检验。

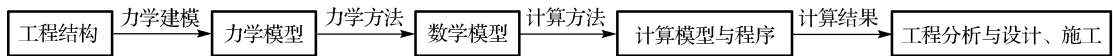


图 1-3

计算简图的建立是力学计算的基础,极为重要。结构计算简图的建立原则如下。

(1) 符合实际——计算简图既要反映实际结构的主要受力和变形特点,又要使计算结果安全可靠。

(2) 便于计算——分清主次,略去细节,忽略次要因素,使分析计算过程方便且简单。

构建计算简图时,需要在多方面进行简化,下面简要地说明建立杆系结构计算简图的简化要点。

1.2.1 结构体系的简化

杆系结构可分为平面杆系结构和空间杆系结构。一般结构实际上都是空间结构,各部分相互连接成为一个空间整体,以承受各个方向可能出现的荷载。但在多数情况下,工程结构常可以忽略一些次要的空间约束而将实际结构分解为平面结构,使计算得以简化。本书主要讨论平面结构的计算问题。当然,也有一些结构具有明显的空间特征而不宜简化成平面结构。

1.2.2 杆件的简化

杆件的截面尺寸(宽度、厚度)通常比杆件长度小得多,截面上的应力可根据截面的内力(弯矩、轴力、剪力)来确定。因此,在计算简图中,杆件用其轴线表示,杆件之间的连接区用结点表示,杆长用结点间的距离表示。而荷载的作用点也表示到轴线上。

1.2.3 结点的简化

杆件的相互连接处称为**结点**。结点通常简化为以下两种理想类型。

(1)**铰结点**。被连接的杆件在结点处不能相对移动，但可相对转动，即可以传递力，但不能传递力矩。这种理想情况，在实际工程中很难实现。木屋架的结点比较接近于铰结点(图 1-4(a)、(b))。

(2)**刚结点**。被连接的杆件在结点处既不能相对移动，又不能相对转动；既可以传递力，也可以传递力矩。现浇钢筋混凝土结点通常属于这类情形(图 1-5(a)、(b))。

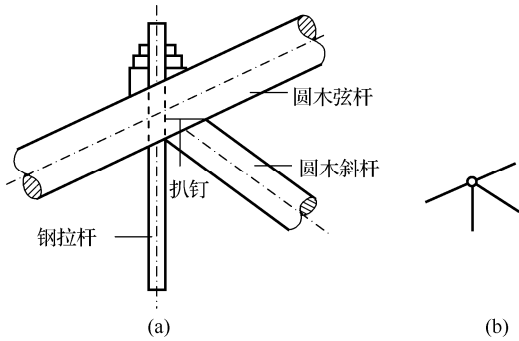


图 1-4

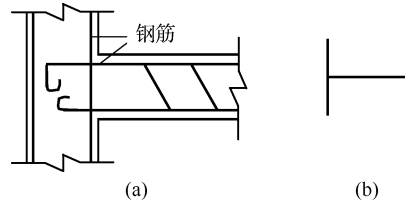


图 1-5

1.2.4 支座的简化

结构与基础的连接处简化为**支座**。按其受力特征，一般简化为以下四种类型。

(1)**活动铰支座**。被支承的部分可以转动和水平移动，不能竖向移动(图 1-6(a))。活动铰支座能提供的反力只有竖向反力 F_y 。在计算简图中用一根竖向支杆表示(图 1-6(b))。桥梁结构中所用的辊轴支座及摇轴支座，是活动铰支座的实例。

(2)**固定铰支座**。被支承的部分可以转动，不能移动(图 1-7(a))。固定铰支座能提供两个反力 F_x 、 F_y ，在计算简图中用两根相交的支杆表示(图 1-7(b))。

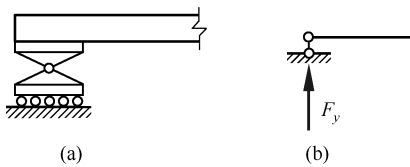


图 1-6

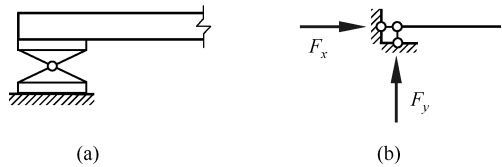


图 1-7

(3)**滑动支座**。滑动支座也称为定向支座。被支承的部分不能转动，但可沿一个方向平行滑动(图 1-8(a))。滑动支座能提供反力矩 M 和一个反力 F_y 。在计算简图中用两根平行支杆表示(图 1-8(b))。

(4)**固定支座**。被支承的部分完全被固定(图 1-9(a))。固定支座能提供三个反力： F_x 、 F_y 、 M 。在计算简图中，固定支座可按图 1-9(b)表示。

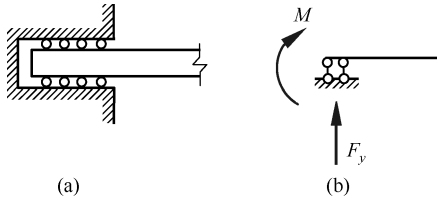


图 1-8

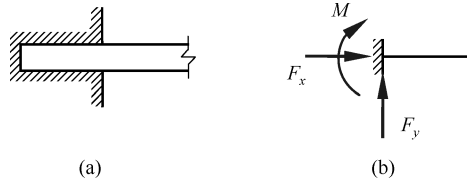


图 1-9

1.2.5 材料性质的简化

工程结构中所用的材料通常为钢、混凝土、砖、石、木材等。在结构计算中，为了简化，对组成各构件的材料一般都假设为连续的、均匀的、各向同性的、弹性或弹塑性的。

上述假设对于金属材料在一定受力范围内是符合实际情况的。对于混凝土、钢筋混凝土、砖、石等材料则带有一定程度的近似性。至于木材，因其顺纹与横纹方向的物理性质不同，故须注意各向异性这一特点。

1.2.6 荷载的简化

结构承受的荷载可分为体积力和表面力两大类。体积力指的是结构的自重或惯性力等；表面力则是由其他物体通过接触面而传给结构的作用力，如土压力、车辆的轮压力等。在杆系结构中把杆件简化为轴线，因此不管是体积力还是表面力都可以简化为作用在杆件轴线上的力。荷载按其分布情况可简化为集中荷载和分布荷载。

为了说明实际结构的简化过程，现以图 1-10(a) 所示钢筋混凝土单层工业厂房的实例说明。厂房的梁和柱都是预制的。柱子下端插入基础的杯口内，然后用细石混凝土填实。梁与柱的连接是通过将梁端和柱顶的预埋钢板进行焊接而实现的。在横向平面内，柱与梁组成排架(图 1-10(b))，排架之间由屋面板和牛腿上的吊车梁连接。

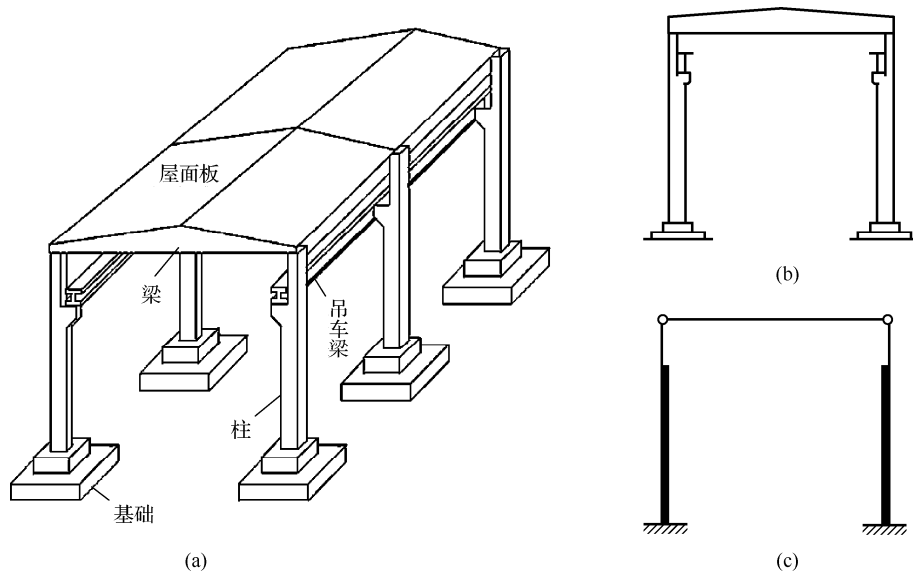


图 1-10

对该厂房结构进行受力分析时，可采用图 1-10(c)所示的计算简图。

首先，厂房结构虽然是许多排架用屋面板和吊车梁连接起来的空间结构，但各排架在纵向以一定的间距有规律地排列着。作用于厂房上的荷载，如恒载、雪载和风载等一般是沿纵向均匀分布的，通常可把这些荷载分配给每个排架，而将每一个排架看作一个独立的体系，于是实际的空间结构便简化成平面结构(图 1-10(b))。

其次，梁和柱都用它们的几何轴线来代表。由于梁和柱的截面尺寸比长度小得多，轴线都可以近似地看作直线。由于截面尺寸不同，柱子截面较粗的部分可用粗实线突出。

梁和柱的连接只依靠预埋钢板进行焊接，梁端和柱顶之间虽不能发生相对移动，但仍有发生微小相对转动的可能，因此可取为铰结点。柱底和基础之间可以认为不能发生相对移动和相对转动，因此柱底可取为固定支座。

1.3 杆系结构和荷载的分类

1.3.1 杆系结构的分类

结构的分类实际上是指结构计算简图的分类。按照受力特点，杆系结构通常可分为下列几类。

(1) 梁。梁(图 1-11(a))是一种受弯构件，其轴线通常为直线。梁可以是单跨的或多跨的。

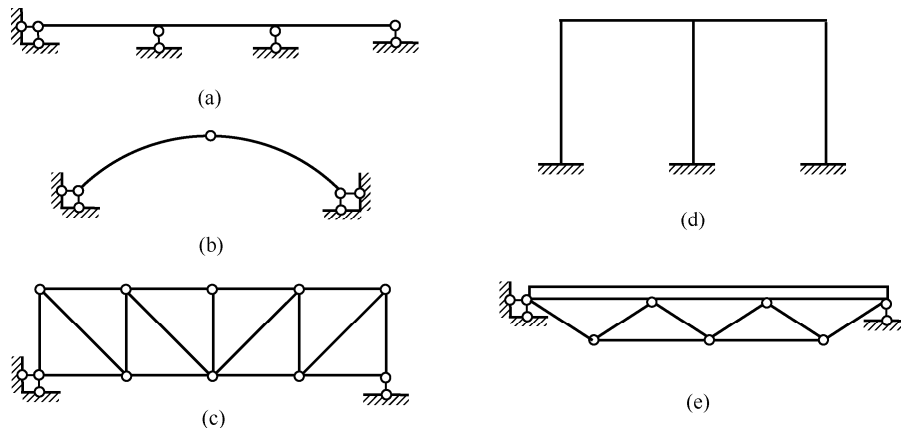


图 1-11

(2) 拱。拱(图 1-11(b))的轴线为曲线，其力学特点是在竖向荷载作用下有水平支座反力(推力)。

(3) 桁架。桁架(图 1-11(c))由直杆组成，所有结点都为铰结点。

(4) 刚架。刚架(图 1-11(d))也由直杆组成，其结点通常为刚结点。

(5) 组合结构。组合结构(图 1-11(e))是桁架和梁或刚架组合在一起形成的结构，其中含有组合结点。

按照结构体系的空间位置，杆系结构有平面结构和空间结构之分。在平面结构中，各杆的轴线和外力的作用线都在同一平面内，如图 1-12 为一平面结构的桁架。空间结构则不满足上述

条件,如图 1-13 为一空间刚架,各杆的轴线不在同一平面内。大多数结构在设计中通常是按平面结构进行计算的。在有些情况下,必须考虑结构的空作用。

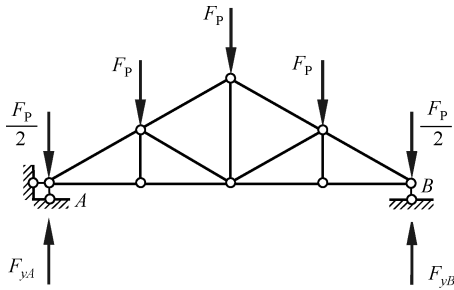


图 1-12

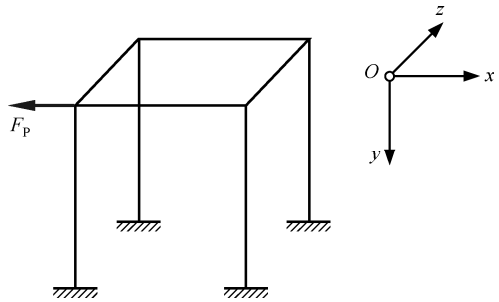


图 1-13

除上述分类外,按计算特性,结构又可分为静定结构和超静定结构。如果结构的杆件内力(包括支座反力)可由平衡条件唯一确定,则此结构称为**静定结构**。如果杆件内力和支座反力由平衡条件不能唯一确定,还必须同时考虑变形条件,则此结构称为**超静定结构**。

1.3.2 荷载的分类

荷载是主动作用于结构的外力,如结构的自重,工业厂房结构上的吊车荷载,施加于结构上的水压力和土压力。除外力之外,还有其他因素的作用可以使结构产生内力或变形,如温度变化、基础沉陷、材料收缩等。从广义上来说,这些因素也可以称为荷载。

对结构进行计算以前,须先确定结构所受的荷载。荷载的确定是结构设计中极为重要的工作。荷载若估计过大,则设计的结构会过于笨重,造成浪费;荷载若估计过低,则设计的结构将不够安全。根据荷载作用时间、作用位置和荷载作用的性质,可将荷载作如下的分类。

(1)按荷载作用时间分类。荷载可以分为恒载和活载两类。恒载是长期作用在结构上的不变荷载,如结构的自重或土压力。活载是临时作用在结构上的可变荷载,如列车、吊车荷载,人群荷载、雪载和风载等。

(2)按荷载作用位置分类。对结构进行计算时,恒载和大部分活载(如雪载、风载)在结构上作用的位置可以认为是固定的,这种荷载称为**固定荷载**。有些活载如吊车梁上的吊车荷载、公路桥梁上的汽车荷载,在结构上的位置是移动的,这种荷载称为**移动荷载**。

(3)根据荷载作用的性质分类。可以分为静力荷载和动力荷载两类。**静力荷载**的大小、方向和位置不随时间变化或变化极为缓慢,不使结构产生显著的加速度,因而惯性力的影响可以忽略。**动力荷载**是随时间迅速变化或在短暂时段内突然作用或消失的荷载,使结构产生显著的加速度,因而惯性力的影响不能忽略。结构的自重和其他恒载是静力荷载。动力机械运转时产生的荷载或冲击波的压力是动力荷载的例子。风载和地震作用通常按动力荷载考虑,但在设计中可简化为静力荷载。

1.4 结构力学的发展简史

在 17 世纪,人类科学史上的几位巨人奠定了现代科学的基石——经典力学。1609 年和 1619 年,开普勒(J. Kepler, 1571—1630 年)先后著写《新天文学》和《宇宙和谐论》,提出行星运动

的开普勒三定律。1632年，伽利略(G. Galileo, 1564—1642年)著写的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》出版，支持了地动学说，首先阐明运动的相对性原理；1638年，他出版《两门新科学的对话》，讨论了材料抗断裂、介质对运动的阻力、惯性原理、自由落体运动、斜面上物体的运动、抛射体的运动等问题，给出了匀速运动和匀加速运动的定义。1687年，牛顿(I. Newton, 1643—1727年)集前人之大成，著写了《自然哲学的数学原理》，阐述并建立了牛顿运动定律和万有引力定律，构建了经典力学大厦的基本框架。结构力学就是在经典力学框架体系下逐渐发展起来的。

1.4.1 能量原理和能量方法

能量原理是结构分析的理论基础，由此导出了几个位移计算和内力分析的普遍性方法，即能量方法。虚位移原理由约翰·伯努利(John Bernoulli, 1667—1748年)在1717年提出。英国科学家麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831—1879年)于1864年对只有两个力的简单情况建立了位移互等定理，并提出计算位移的单位荷载法。随后，意大利学者贝蒂(E. Betti, 1823—1892年)于1872年对麦克斯韦位移互等定理加以普遍证明，推广为功的互等定理；卡斯蒂利亚诺(A. Castigliano, 1847—1884年)于1879年提出了卡氏第一定理和卡氏第二定理及最小功原理(应变能极小原理或最小势能原理)；德国学者恩格瑟(F. Engesser, 1848—1931年)于1884年提出了余能的概念，1889年提出余能方法。

变形体虚功原理的含义为：外虚功=内虚功，包括虚力原理和虚位移原理两种形式。由变形体虚力原理可以导出计算梁、刚架或桁架指定点位移或转角的通用方法，即单位荷载法。前面述及，1864年麦克斯韦提出单位荷载法，1874年德国力学家莫尔(Otto Mohr, 1835—1918年)也独立地建立了此方法，所以，单位荷载法也称为麦克斯韦-莫尔(Maxwell-Mohr)法。两人都曾将单位荷载法用于静定桁架的位移计算。单位荷载法利用了三个基本条件，即力系平衡条件、变形协调条件和物理条件。由于其物理条件不限于线弹性，它也适用于求解非弹性结构的位移；由于结构类型不限于静定结构，它也可用于超静定结构的位移计算。对于任何一个具有理想约束的平衡刚体体系，系统内虚功为0，从而刚体体系的主动动力(即外力)所做的虚功为0，这就是刚体虚功原理。由刚体虚位移原理可以得到求解静定结构指定约束力的快速简便方法，即单位位移法。

1879年，意大利铁路工程师卡斯蒂利亚诺出版了《弹性系统平衡理论》，此书基于虚功原理提出了卡氏第一定理、卡氏第二定理和最小功原理。卡氏第一定理给出了求结构产生位移后某一截面约束力的方法。卡氏第一定理可用于求解超静定结构，而且它的应用与叠加原理无关，可以推广到非线性弹性系统，它相当于结构的力系平衡条件。卡氏第二定理给出了一种求桁架、梁或刚架结构中某一点的位移或转角的方法。卡氏第二定理的应用也可推广到非线性弹性状态，它相当于结构的变形协调条件。根据卡氏第二定理，某一点的位移等于结构中的应变能对作用在此点并沿所求位移方向的力的一次偏导数。用卡氏第二定理求结构某处的位移时，该处需要有与所求位移相应的荷载。若需计算某处的位移，而该处并无与位移相应的荷载，则可采用附加力法。1878年克罗蒂(F. Crotti)提出计算弹性体位移的定理，1889年恩格瑟也独立提出了这一定理，称为克罗蒂-恩格瑟(Crotti-Engesser)定理，该定理由虚力原理出发，利用应变余能的概念导出，适用于非线性弹性结构的位移计算。卡氏第二定理是克罗蒂-恩格瑟定理的特例。这样，最小势能原理和最小余能原理就先后建立起来了。

1886年德国力学家穆勒-布雷斯劳(H. Muller-Breslau, 1851—1925年)基于虚位移原理,提出了一种快速确定静定、超静定梁的内力影响线形状的方法,即某量值的影响线与此量值作用下梁的位移形状相同。该方法称为穆勒-布雷斯劳原理或穆勒-布雷斯劳准则,也就是教材中所称的机动法。

20世纪中叶,能量原理和能量方法取得了突破性进展,研究者相继提出了迥异于单变量变分原理(即势能原理和余能原理)的二类变量、三类变量的广义变分原理,为结构分析提供了新的方法。1950年赖斯纳(E. H. Reissner)提出了弹性力学的二类变量广义变分原理,展示了在能量法中建立同时近似地满足不同力学性质的方程的前景。1950年钱令希(1916—2009年)在《中国科学》发表了论文“余能理论”,开创了我国力学工作者研究变分原理的先河。之后,我国出现了一些有国际影响的变分原理研究成果,如1954年胡海昌提出的三类变量广义变分原理,1955年鹭津久一郎(K. Washizu)在美国也发表了这一原理,称为胡-鹭津(Hu-Washizu)变分原理,其中不少工作受到了钱令希论文的启发。2015年,杨迪雄等应用虚位移原理,建立了精确、解析地计算超静定梁结构内力影响线方程的机动法,克服了过去超静定力影响线计算繁琐的缺陷。

1.4.2 力法和位移法

在力法、位移法出现以前,人们只能对简单结构的内力和位移进行计算。从1847年开始的数十年间,人们应用图解法(Maxwell图等)、解析法(结点法和截面法)等来研究静定桁架结构的受力分析,建立了桁架理论的基础。力法最初由麦克斯韦于1864年提出,后来又被莫尔于1874年修正,并由穆勒-布雷斯劳于1886年作了根本性的发展。力法的基础是变形协调条件,所以实质上它是相容方法或柔度法。用力法求解超静定结构内力时,以多余约束力为基本变量,先选择几何不变的基本体系,由变形协调条件建立力法方程,再由单位荷载法求出力法方程中的位移影响系数,然后解方程得到多余力。当多余力确定后,超静定结构的其余支座反力和内力可由静力平衡条件求出。

力法的基本原理简单易懂,但对于比较复杂的超静定结构,基本体系的选择需要较多的经验和人为干预;对于多层多跨刚架结构,多余未知力的数目较多,方程求解难度增大。而位移法可以克服上述困难。位移法的发展分为转角位移法和矩阵位移法两阶段。1826年法国力学家纳维(C. L. M. H. Navier, 1785—1836年)提出了弹性力学中的位移法思想,并用于求超静定桁架的内力。转角位移法的前身——次弯矩法最早由德国的曼德拉(H. Manderla)于1880年提出,用于求解桁架的次弯曲应力,1892年莫尔对它进行修改,并逐渐为人所知。次弯矩法假定弯矩不影响桁架结构的结点位移,这只对小弯矩效应才能成立。进入20世纪,随着使用钢筋混凝土材料建造的桥梁和高层建筑逐渐增多,刚接结点引起的弯矩效应变得显著,而轴力产生的结点位移很小。1914年丹麦工程师阿克塞尔·本迪克森(Axel Bendixen)将转角位移法用于有侧移刚架内力计算。1915年,美国学者威尔逊(W. M. Wilson)和梅尼(G. A. Maney)改造了次弯矩法,独立地用它求解刚架内力,并称为转角位移法。1926年丹麦学者奥斯特菲尔德(A. Ostenfeld)指出了力法和位移法的对偶性。事实上,他的关于结构中未知位移的典型方程与穆勒-布雷斯劳的关于多余力的典型方程是互补的。用位移法求解结构内力时,以独立的结点角位移和线位移为基本变量,将整体结构分隔成许多单根杆件,利用杆件的力-位移关系(转角-位移方程)通

过结点力矩和截面投影平衡条件建立位移法方程，然后求解方程得到结点位移。最后，将结点位移回代入杆件转角位移方程，获得各杆的杆端内力。位移法无须关心基本体系是否几何不变（力法基本体系不能是可变体系），它适用于静定结构和超静定结构的受力分析。

比较可见，力法和位移法都利用了结构的静力平衡条件、变形协调条件和力-位移关系（可以类比于微元体的应力-应变关系）。不同的是，力法先在基本体系层次上由单位荷载法给出力-位移关系（即单位荷载作用下表示基本体系位移的柔度影响系数），然后在结构层次上满足变形协调条件并建立力法柔度方程，最后由平衡条件解出各杆端内力。而位移法先在杆件单元层次上考虑变形协调条件写出力-位移关系（转角-位移方程或单位位移下表示基本结构内力的刚度影响系数），然后在结构层次上满足静力平衡条件并建立位移法刚度方程，最后利用求出的结点位移，由变形协调条件和力-位移关系求出杆端内力。

有意思的是，力法、位移法与能量原理具有密切的联系。力法方程可由余能原理或卡氏第二定理导出，而位移法方程可由势能原理导出。此外，有限元法的发展与变分原理有更直接而深刻的关系。总的来说，位移法适用于求解超静定和静定结构，而力法一般适用于超静定结构；位移法可以直接求出结构位移和内力，而力法不能直接求出位移；位移法比较容易建立刚度方程，便于计算机自动化求解。因此，位移法是目前结构分析的主要方法。值得指出的是，教材中介绍的力法以多余力为未知量，也有人在努力发展与位移法平行的以全部力为未知量的“完整力法”（integrated force method）。

在计算机和矩阵位移法出现以前，工程师手工解算转角位移法得到的高阶代数方程组十分麻烦。1922年，卡莉斯伍(Calisev)将无侧移刚架的转角作为未知量，提出逐次近似法，可以避免直接求解高阶方程组。1930年美国学者哈迪·克罗斯(Hardy Cross)发展了一种渐近的位移法，即力矩分配法，用来近似求解超静定连续梁。其实，逐次近似法和力矩分配法的求解思想几乎相同。力矩分配法的计算过程是：逐个使结点“约束”和“放松”，对结点处弯矩依次进行分配和平衡，重复迭代直到结点的不平衡弯矩或约束力矩接近0。力矩分配法采用逐次迭代策略求解位移法的联立代数方程组，避免了直接求解高阶方程组的困难。它是求解线性代数方程组的迭代法在结构力学中的一次成功应用，在当时引起了工程界的极大关注，是20世纪30年代结构分析的最显著进展。但计算机发明以后，力矩分配法和其他的渐近分析法，如力矩迭代法、无剪力分配法、索斯韦尔松弛法等逐渐退出历史舞台，让位于20世纪50年代兴起的矩阵位移法。

1.4.3 矩阵位移法和有限元法

首先介绍有限元法的发展脉络，然后具体展开叙述。1943年库朗(R. Courant, 1888—1972年)已从数学上明确提出过有限元的思想；20世纪50年代，阿吉里斯(J. H. Argyris, 1913—2004年)、克拉夫(Ray W. Clough, 1920—2016年)等从飞机结构分析中发展出了有限元方法。1960年克拉夫首次采用有限元的名称。我国数学家冯康(1920—1993年)、英国力学家辛克维奇(O. C. Zienkiewicz, 1921—2009年)和美国学者卞学镞(1919—2009年)等许多学者对有限元法的发展作出了重要贡献。

1943年，库朗第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片插值函数，结合最小势能原理求解了圣维南扭转问题。辛克维奇在一篇综述文献中写道：“遗憾的是，由于不是一名工程师，他没有将此思想与离散单元网格联系起来，致使他的工作被埋没了许多年。”但后来，人们认